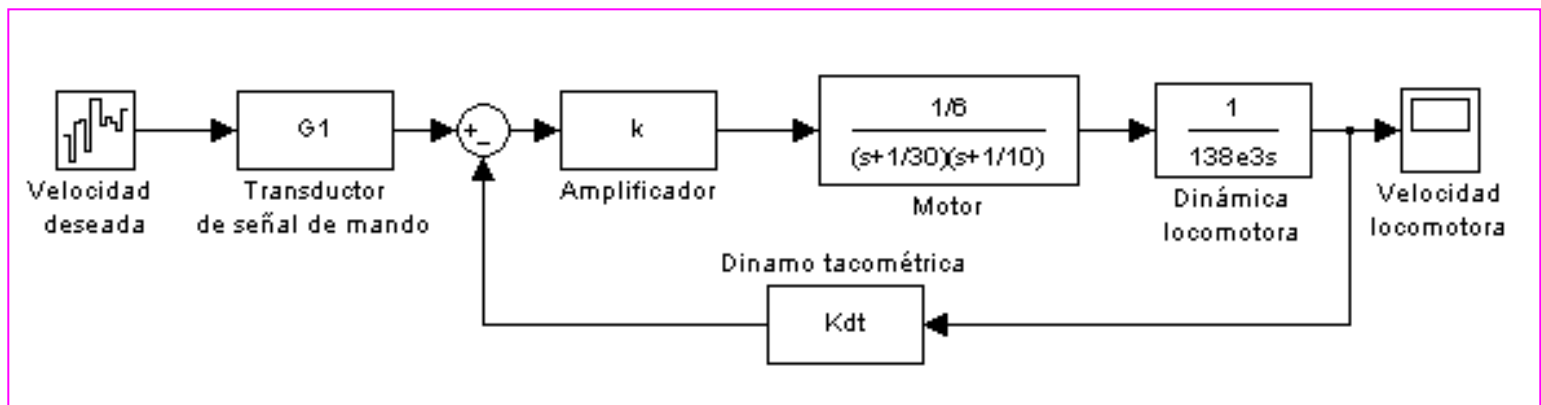


## Capítulo 3: Descripción y representación de los sistemas continuos

[carlos.platero@upm.es](mailto:carlos.platero@upm.es) (C-305)

# Descripción y representación de los sistemas continuos

- ▶ Sistema: división en subsistemas o bloques
  - ▶ FDT & diagrama a bloques
- ▶ Objetivos del capítulo
  - ▶ Linealización del sistema
  - ▶ FDT
  - ▶ Diagramas a bloques
  - ▶ Sistemas realimentados
  - ▶ Álgebra de bloques



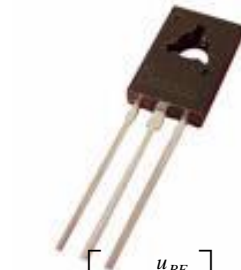
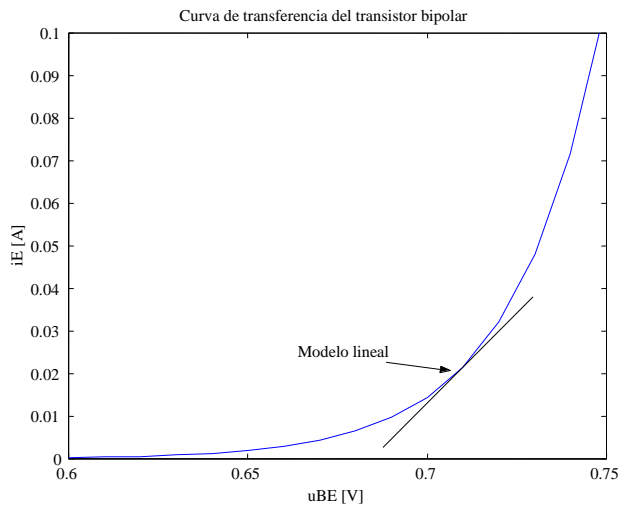
# Linealización

## ► Monovariable

$$f(x) = [f(x)]_0 + \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right]_0 (x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_0 (x - x_0)^n + \dots$$

$$f(x) \cong [f(x)]_0 + \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]_0 (x - x_0) \quad \Delta y = \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]_0 \Delta x$$

## ► Ejemplo



$$i_E = \left[ I_S e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} \right]_{u_{BE}=V_{BE}} + \left[ \frac{I_S e^{\frac{u_{BE}}{V_T}}}{V_T} \right]_{u_{BE}=V_{BE}} (u_{BE} - V_{BE}) \quad i_E = I_E + \frac{I_E}{V_T} (u_{BE} - V_{BE})$$

$$\Delta i_E = g_m \Delta u_{BE}$$

# Linealización de sistemas dinámicos

---

- Modelo basado en ecuaciones diferenciales:

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_n, \dot{x}_n, \ddot{x}_n, \dots) = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]_0 \Delta y + \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right]_0 \Delta \dot{y} + \left[ \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} \right]_0 \Delta \ddot{y} + \dots + \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1} \right]_0 \Delta x_1 + \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right]_0 \Delta \dot{x}_1 + \left[ \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} \right]_0 \Delta \ddot{x}_1 + \dots + \\ & + \left[ \frac{\partial F}{\partial x_n} \right]_0 \Delta x_n + \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} \right]_0 \Delta \dot{x}_n + \left[ \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_n} \right]_0 \Delta \ddot{x}_n + \dots = 0 \end{aligned}$$

## Ejemplo 3.2

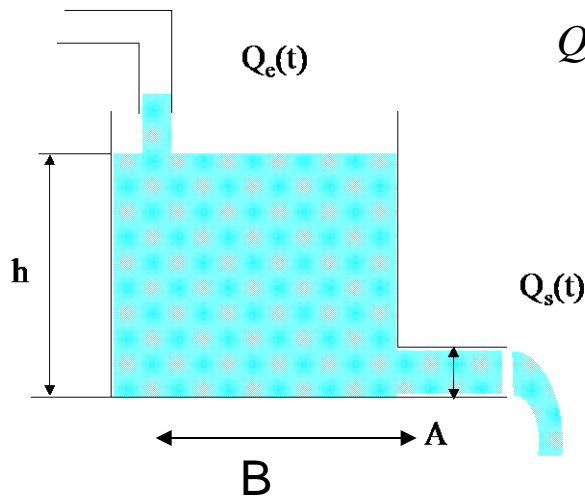
---

Linealizar la expresión:  $y = 3x^2 + 4x\dot{x} + \text{sen}(x) + 2$   
entorno al punto de reposo  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

$$\Delta y = 3\pi \cdot \Delta x + 2\pi \cdot \Delta \dot{x}$$

# Ejercicio 3.3

Obtener el modelo dinámico del nivel del agua y linealizarlo en torno a un punto de reposo. Considere que el caudal de entrada,  $Q_e$ , en equilibrio es de  $1 \text{ m}^3/\text{s}$  y la sección de salida,  $A$ , es de  $1 \text{ m}^2$ , mientras la base de depósito,  $B$ , es de  $1 \text{ m}^2$ . Analizar las discrepancias entre el modelo no lineal y lineal en el régimen permanente, si el caudal de entrada, en primer lugar, evoluciona a  $1.1 \text{ m}^3/\text{s}$  y luego pasa a  $2 \text{ m}^3/\text{s}$ .



$$\left. \begin{aligned} Q_e(t) - Q_s(t) &= B \frac{dh}{dt} \\ Q_s(t) &= c \cdot v_s \cdot A = c \cdot \sqrt{2gh} \cdot A \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_e(t) - c \cdot \sqrt{2gh} \cdot A - B\dot{h} = 0$$

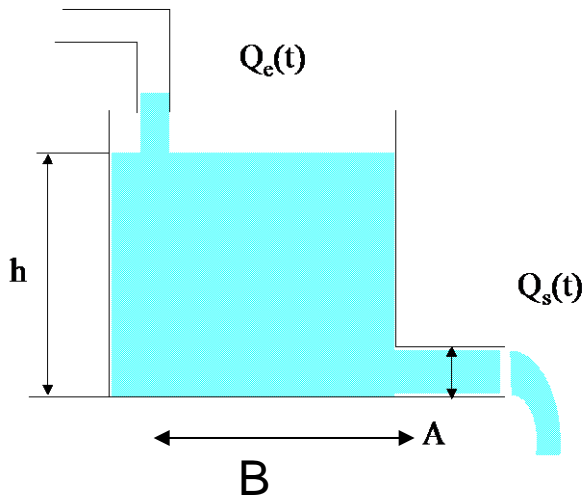
$$\Delta Q_e(t) - \left[ c \cdot \sqrt{2g} \frac{1}{2\sqrt{h}} \cdot A \right]_0 \Delta h - B\Delta\dot{h} = 0$$

$$\Delta Q_e(t) - 10\Delta h(t) = \Delta\dot{h}(t)$$

$$\frac{\Delta h(s)}{\Delta Q_e(s)} = \frac{1}{s+10}$$

# Ejercicio 3.3

- ▶ La validez depende del tamaño del incremento alrededor del punto de reposo



Modelo no lineal estacionario:

$$Q_{e,0} = 1 \frac{m^3}{s} \rightarrow h_0 = \frac{Q_{e,0}^2}{A^2 \cdot 2g} = 0.05m$$

$$Q_{e,1} = 1.1 \frac{m^3}{s} \rightarrow h_1 = \frac{Q_{e,1}^2}{A^2 \cdot 2g} = 0.0605m$$

$$Q_{e,2} = 2 \frac{m^3}{s} \rightarrow h_2 = \frac{Q_{e,2}^2}{A^2 \cdot 2g} = 0.2m$$

Si el incremento es de  $0.1$  ó  $1 \text{ m}^3/\text{s}$ , los resultados del modelos incremental son:

$$\left. \begin{aligned} \Delta h_1 &= \frac{\Delta Q_{e,1}}{10} = 0.01 \Rightarrow h_1 \cong h_0 + \Delta h_1 \\ h_0 &= \frac{Q_{e,0}^2}{A^2 \cdot 2g} = 0.05 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_1 \cong 0.06 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta h_2 &= \frac{\Delta Q_{e,2}}{10} = 0.1 \Rightarrow h_2 \cong h_0 + \Delta h_2 \\ h_0 &= \frac{Q_{e,0}^2}{A^2 \cdot 2g} = 0.05 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_2 \cong 0.15 \text{ m}$$

# Final de enero 2017

---

Sea la dinámica del sistema:

$$\dot{y}(t) + x(t)y(t) + y(t) = x^2(t) + 2$$

1. Obtener el punto de equilibrio sabiendo que  $x_0=3$ .
2. Calcular el modelo lineal incremental  $\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}$  para el punto de reposo calculado en el anterior apartado.
3. Si la entrada  $x(t)$  pasa bruscamente de 3 a 3.2, determinar la evolución temporal de la salida analíticamente y gráficamente utilizando el modelo lineal.
4. Comparar la salida del régimen permanente entre el resultado del modelo lineal y del modelo no lineal.
5. Hacer lo mismo que en el apartado 3 y 4, si la entrada  $x(t)$  pasa bruscamente de 3 a 5. Comparar estos resultados con los del apartado 3 y 4. Obtener conclusiones.



# Final de enero 2017

---

▶ Obtener el punto de equilibrio sabiendo que  $x_0=3$ .

$$y_0 = \frac{x_0^2 + 2}{1 + x_0} = 2.75$$

Calcular el modelo lineal incremental  $\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}$  para el punto de reposo calculado en el anterior apartado.

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} = \frac{13/4}{s + 4}$$

Si la entrada  $x(t)$  pasa bruscamente de 3 a 3.2, determinar la evolución temporal de la salida analíticamente y gráficamente utilizando el modelo lineal.

$$\Delta y(t) = 0.16(1 - e^{-4t})$$

Comparar la salida del régimen permanente entre el resultado del modelo lineal y del modelo no lineal.

$$\text{Lineal: } y(\infty) = 2.75 + 0.16 = 2.91$$

$$\text{No lineal: } y(\infty) = \frac{3.2^2 + 2}{1 + 3.2} = 2.91$$

Hacer lo mismo que en el apartado 3 y 4, si la entrada  $x(t)$  pasa bruscamente de 3 a 5. Comparar estos resultados con los del apartado 3 y 4. Obtener conclusiones.

$$\text{Lineal: } y(\infty) = 2.75 + 1.62 = 4.37$$

$$\text{No lineal: } y(\infty) = \frac{5^2 + 2}{1 + 5} = 4.5$$

# Función de transferencia (LTI-SISO)

---

## ► Lineal & No Lineal (proceso de linealización)

$$\text{Modelo lineal : } \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t)$$

$$\text{Modelo incremental : } \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} \Delta y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} \Delta x(t)$$

## ► Aplicando transformadas de Laplace

$$\text{Modelo lineal : } \sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j X(s)$$

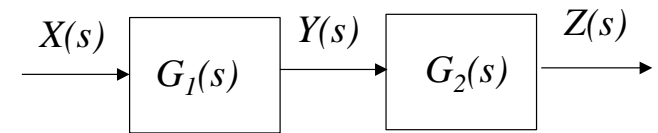
$$\text{Modelo lineal : } \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$$\text{Modelo incremental : } \sum_{i=0}^n a_i s^i \Delta Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j \Delta X(s)$$

$$\text{Modelo incremental : } \frac{\Delta Y(s)}{\Delta X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

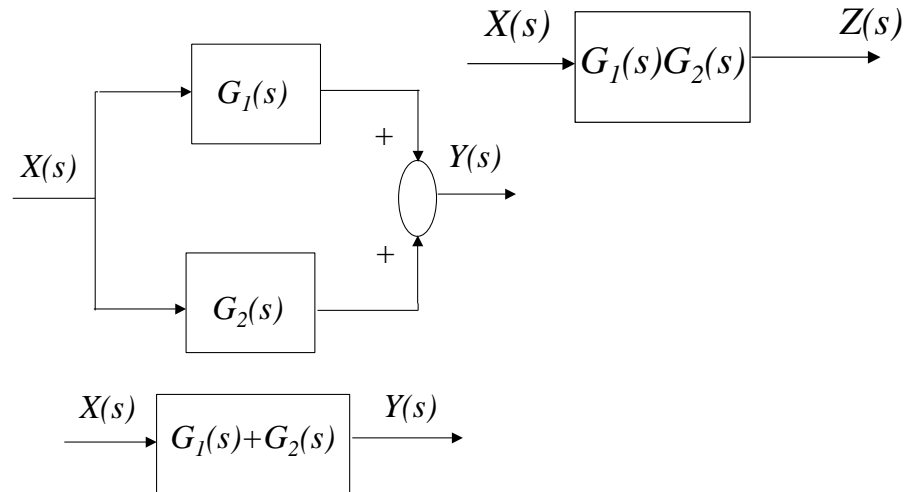
# Diagramas de bloques

## ► Serie



$$Y(s) = G_1(s)X(s) \quad Z(s) = G_2(s)Y(s) \Rightarrow Z(s) = G_1(s)G_2(s)X(s)$$

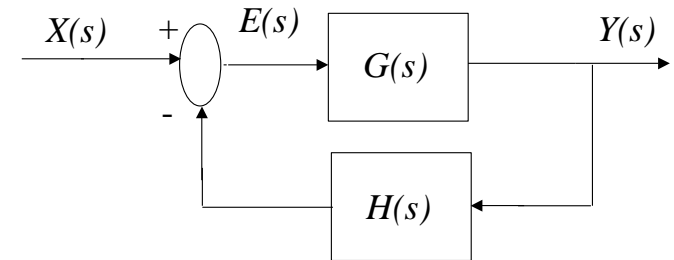
## ► Paralelo



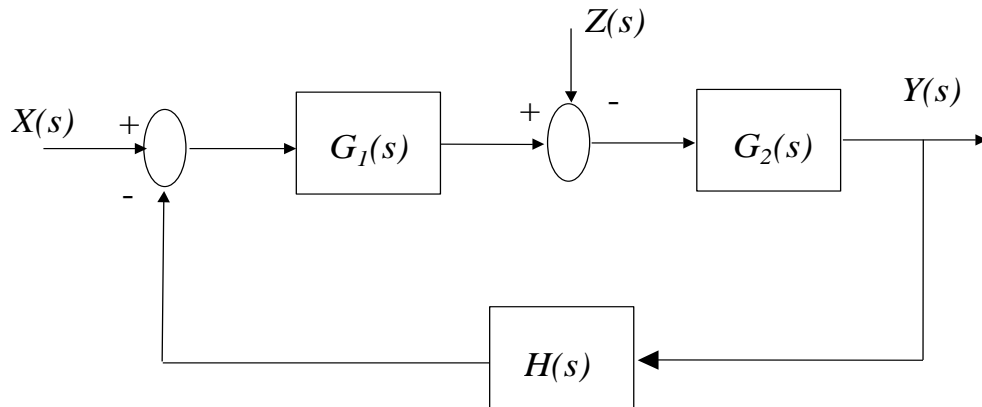
$$Y(s) = G_1(s)X(s) + G_2(s)X(s)$$
$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))X(s)$$

## ► Realimentado

$$\left. \begin{array}{l} Y(s) = E(s)G(s) \\ E(s) = X(s) - H(s)Y(s) \end{array} \right\} \Rightarrow M(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



# Sistemas realimentados lineales



$$Y(s) = M_1(s)X(s) + M_2(s)Z(s)$$

(por teorema de superposición)

$$M_1(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)} \quad M_2(s) = \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)}$$

- Condición de diseño:  $|G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)| \gg 1$

$$M_1(s) \cong \frac{1}{H(s)} \quad M_2(s) \cong \frac{-1}{G_1(s) \cdot H(s)}$$

# Problema 2

El esquema de la figura representa un sistema de control continuo sobre un depósito de agua. La altura es medida por un transductor resistivo, de forma que la tarjeta de acondicionamiento de la señal, da una tensión proporcional a la altura:

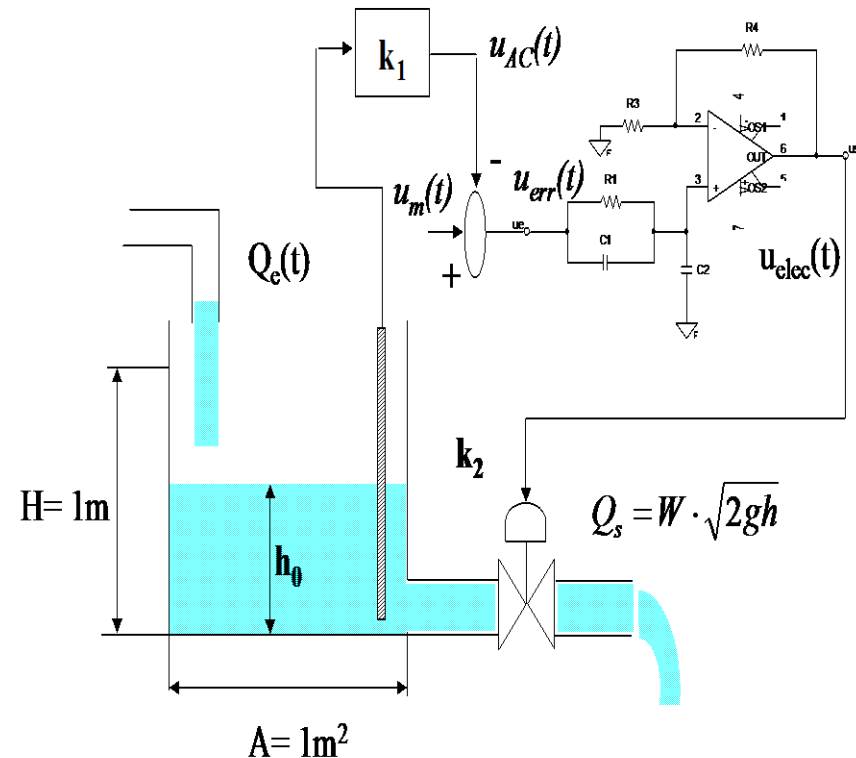
$$u_{AC}(t) = k_1 h(t)$$

siendo  $k_1$  la ganancia, de valor 10 [V/m]. Esta señal es comparada con la señal de mando,  $u_m(t)$ , generando la señal de error, la cual ataca al regulador PI analógico, cuya ganancia de tensión está dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$u_{elec}(t) + 3 \frac{du_{elec}(t)}{dt} = 2 \left( u_{err}(t) + \frac{du_{err}(t)}{dt} \right)$$

El compensador ataca a la electroválvula de sección variable. La sección de paso,  $W$ , es proporcional a la tensión de salida del regulador con una ganancia  $k_2$ , de valor 0.01 [m<sup>2</sup>/V]. Se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que determinen la dinámica del sistema.
2. Linealizar el modelo respecto al punto de equilibrio,  $u_{m0} = 6V$  y  $h_0 = 0.5m$ . ¿ Cuánto vale el caudal de salida ?, ¿ y el de entrada ?.
3. Diagrama de bloques entre los incrementos de la señal de mando y de la altura del depósito.



# Problema depósito

El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que definen la dinámica del sistemas:

$$u_{AC}(t) = k_1 h(t) = 10h(t)$$

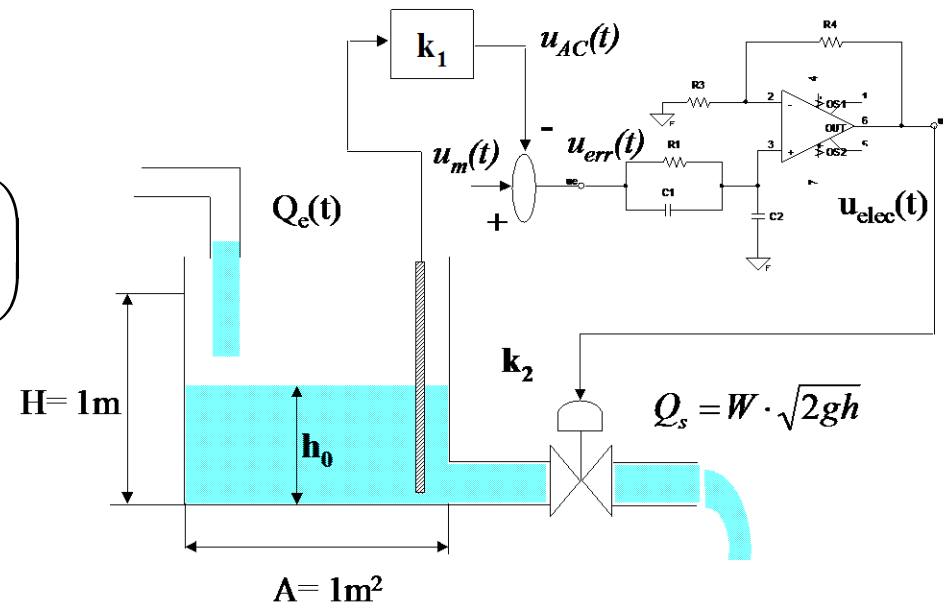
$$u_{err}(t) = u_m(t) - u_{AC}(t)$$

$$u_{elec}(t) + 3\dot{u}_{elec}(t) = 2\left(u_{err}(t) + \dot{u}_{err}(t)\right)$$

$$W = k_2 \cdot u_{elec}(t) = 0.01u_{elec}(t)$$

$$Q_e - Q_s = A \cdot \dot{h}$$

$$Q_s = W \cdot \sqrt{2gh}$$



# Problema depósito

El modelo es no lineal; linealizando a partir de la señal de mando y el nivel del depósito se tendrá un modelo en incrementos alrededor del punto de equilibrio:

$$u_{m0} = 6V$$

$$h_0 = 0.5m$$

$$u_{AC0} = 10 \cdot 0.5 = 5V \rightarrow u_{err0} = 6 - 5 = 1V \rightarrow u_{elec0} = 2.1V = 2V$$

$$W_0 = 0.02m^2$$

$$Q_{e0} = Q_{s0} = 0.02 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.5} = 0.062 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$$

$$\Delta u_{AC}(t) = 10 \Delta h(t)$$

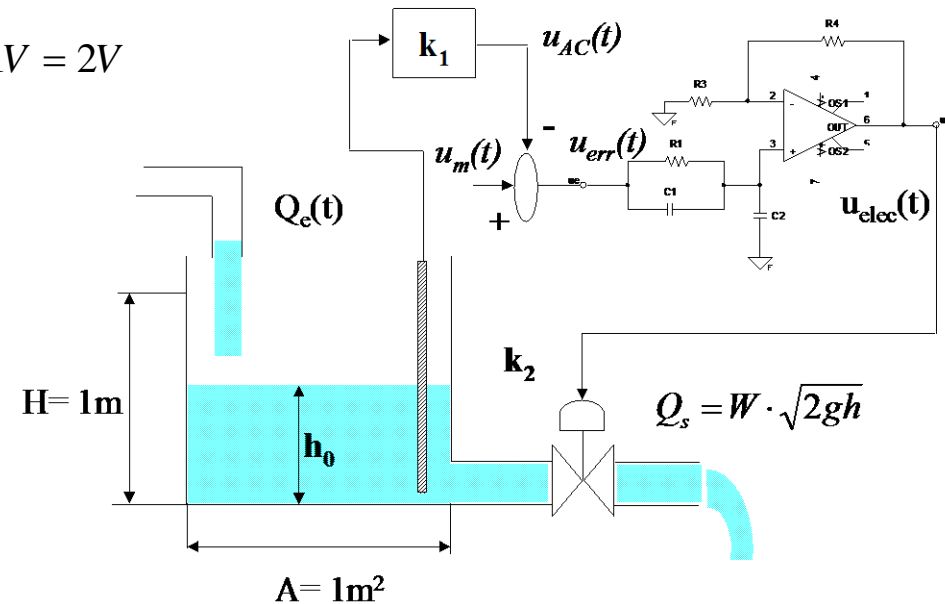
$$\Delta u_{err} = \Delta u_m - \Delta u_{AC}$$

$$\Delta u_{elec}(t) + 3 \Delta \dot{u}_{elec}(t) = 2 \left( \Delta u_{err}(t) + \Delta \dot{u}_{err}(t) \right)$$

$$\Delta W = 0.01 \Delta u_{elec}(t)$$

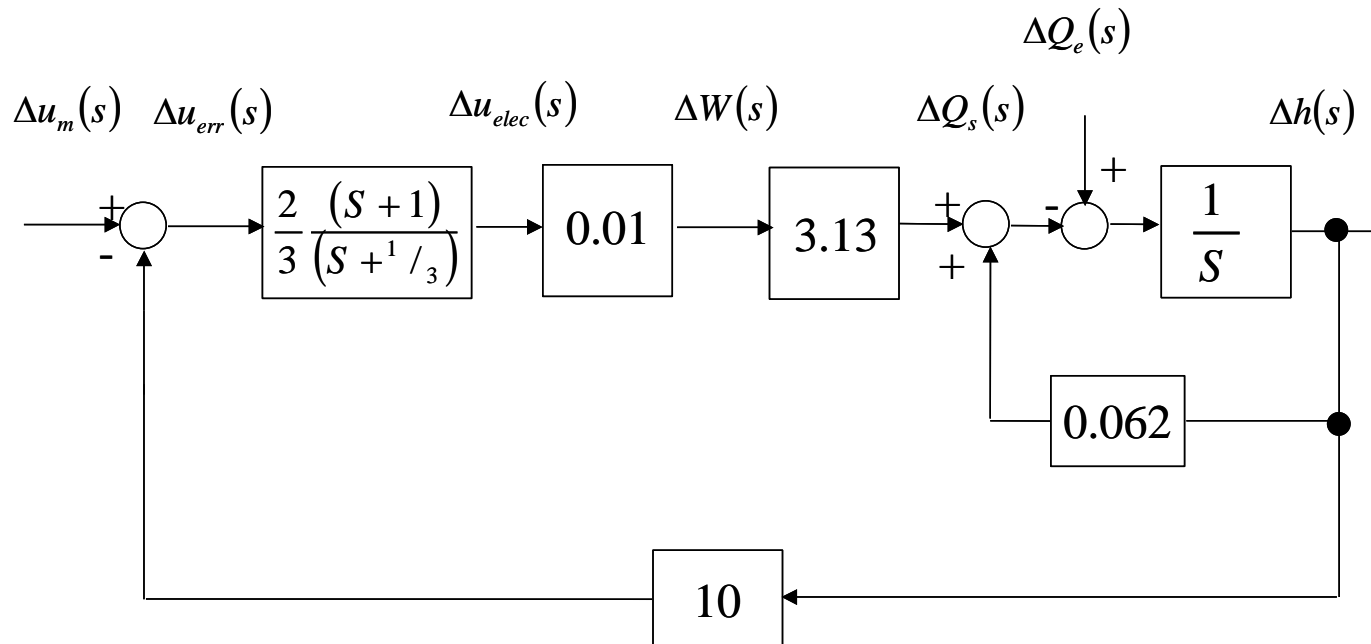
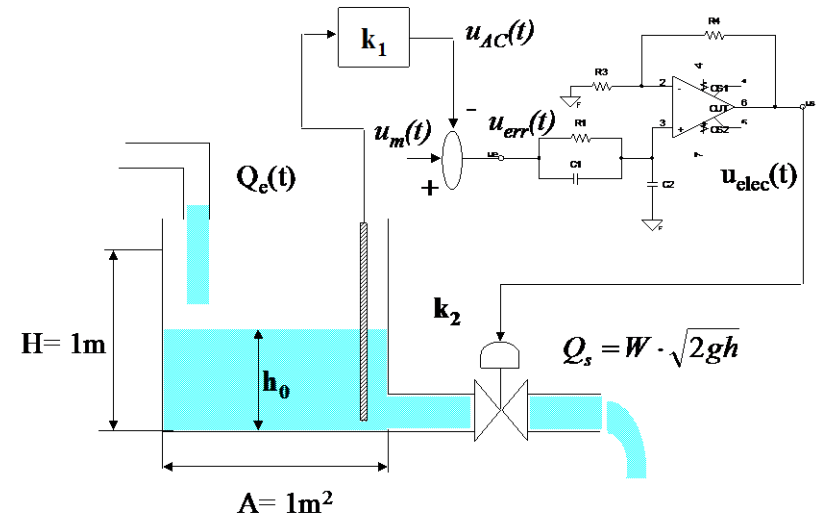
$$\Delta Q_E - \Delta Q_S = A \Delta \dot{h}$$

$$\Delta Q_S = \left[ \sqrt{2gh} \right]_0 \Delta W + \left[ W \sqrt{\frac{g}{2h}} \right]_0 \Delta h = 3.13 \Delta h = 3.13 \Delta W + 0.062 \Delta h$$



# Problema depósito

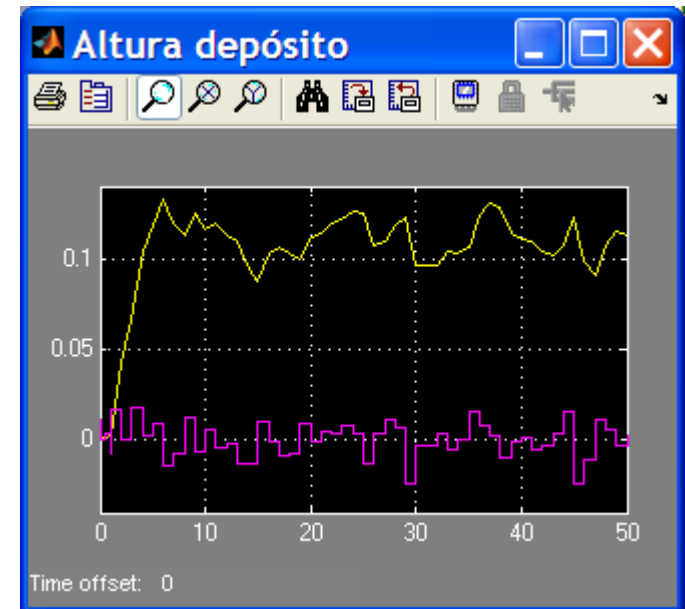
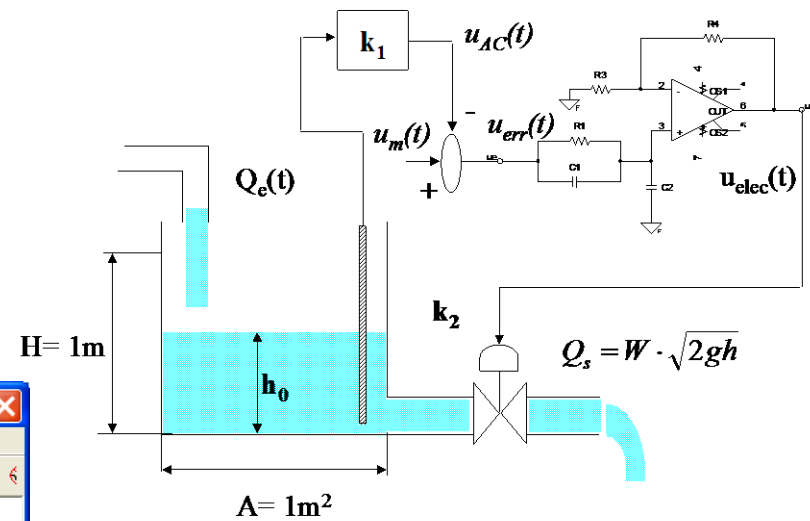
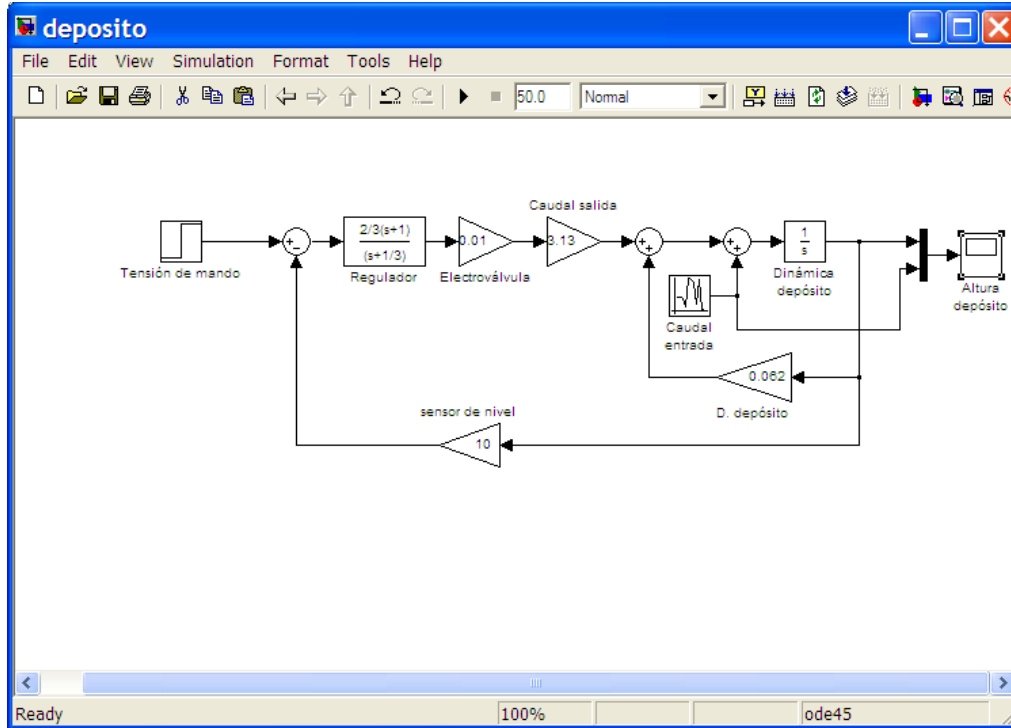
- ▶ El diagrama a bloques quedará como:





# Problema depósito

## ► La simulación:

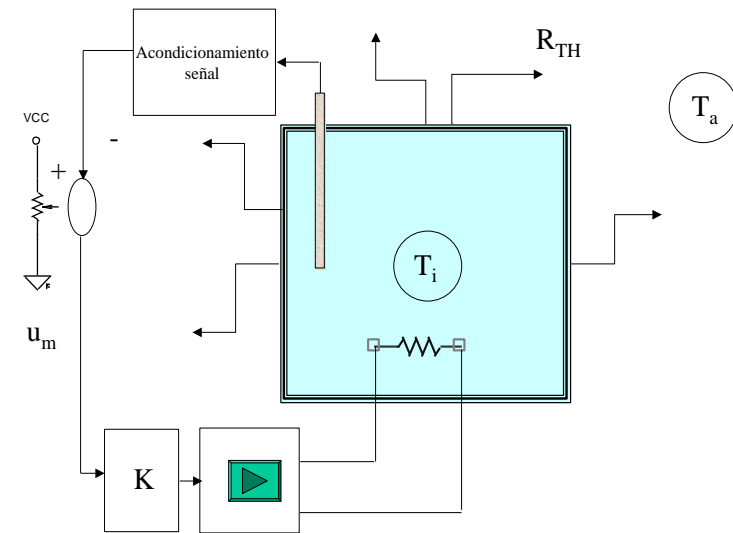


## Ejemplo 3.5

Para calentar el agua de un termo eléctrico se emplea el efecto Joule. Para su regulación se emplea una estructura de realimentación negativa. La temperatura interior del termo,  $T_i$ , es adquirida por un transductor de tipo termopar. La salida del sensor es acondicionada y es convertida en una señal de tensión analógica,  $u_{Ti}$ :

$$T_i = \frac{1}{A} (\dot{u}_{Ti} + au_{Ti})$$

La temperatura deseada en el termo o señal de mando, es convertida a través de un potenciómetro en una señal de referencia,  $u_m$ . Ésta es comparada con la salida de la tarjeta de acondicionamiento y amplificada por un valor  $k$ . Esta señal ataca a la etapa de potencia. Por otro lado, hay que añadir las pérdidas de calor por transmisión de calor, desde el tanque al exterior. Obtener el diagrama a bloques del sistema de control del termo eléctrico y su equivalente reducido.



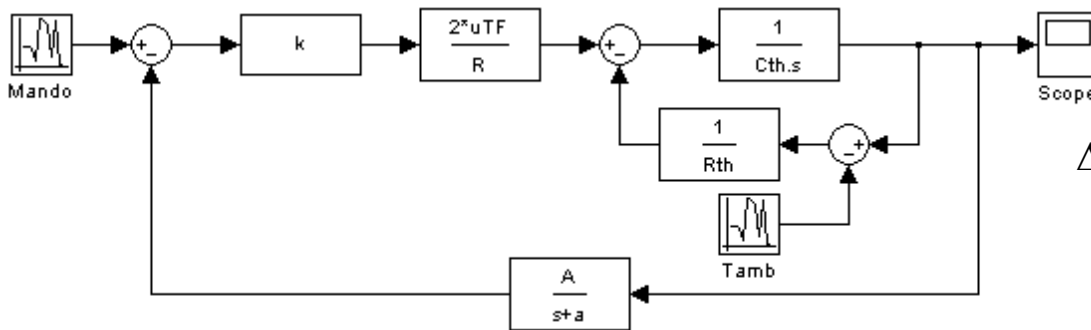
# Ejemplo 3.5

## ► Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales:

- (1)  $u_m - u_{Ti} = u_{err}$  (Comparador)
- (2)  $u_{FT} = Ku_{err}$  (Amplificación señal error)
- (3)  $p = u_{FT}^2 / R$  (Etapas de potencia)
- (4)  $q_{Ti} = mc\dot{T}_i$  (Almacenamiento de energía calorífica)
- (5)  $T_i - T_a = q_P R_{TH}$  (Pérdidas por transmisión del calor)
- (6)  $p = q_{Ti} + q_p$  (Balance energético)
- (7)  $T_i = 1/A(\dot{u}_{Ti} + au_{Ti})$  (Etapas de acondicionamiento transductor)



## ► Diagrama a bloques

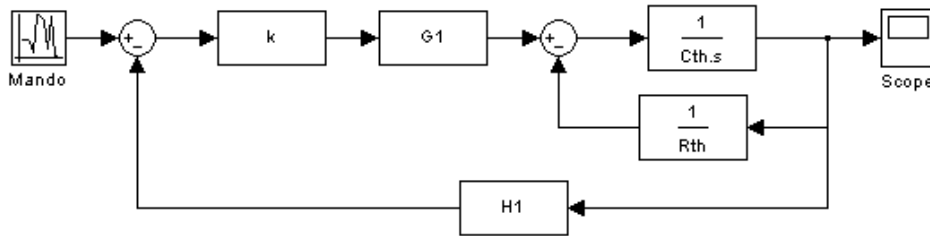


$$\Delta T_i(s) = M_1(s)\Delta u_m(s) + M_2(s)\Delta T_a(s)$$

# Ejemplo 3.4

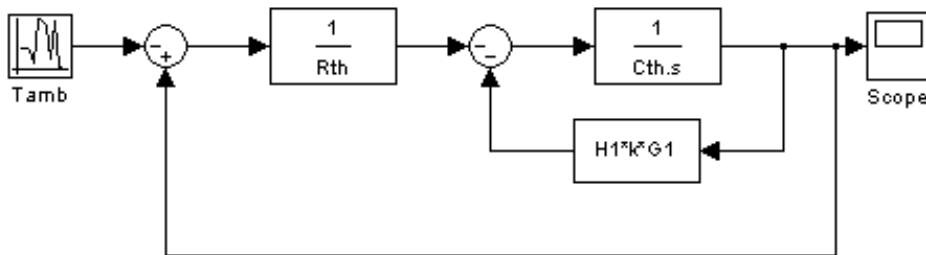


## ► FDT respecto a la señal de mando



$$M_1(s) = \frac{\Delta T_i(s)}{\Delta u_m(s)} = \frac{KG_1 R_{TH}}{1 + H_1 KG_1 R_{TH} + sR_{TH} C_{TH}}$$

## ► FDT respecto a la perturbación



$$M_2(s) = \frac{\Delta T_i(s)}{\Delta T_a(s)} = \frac{1}{1 + H_1 KG_1 R_{TH} + sR_{TH} C_{TH}}$$

# Ejemplo 3.4



**Thermor** Concept

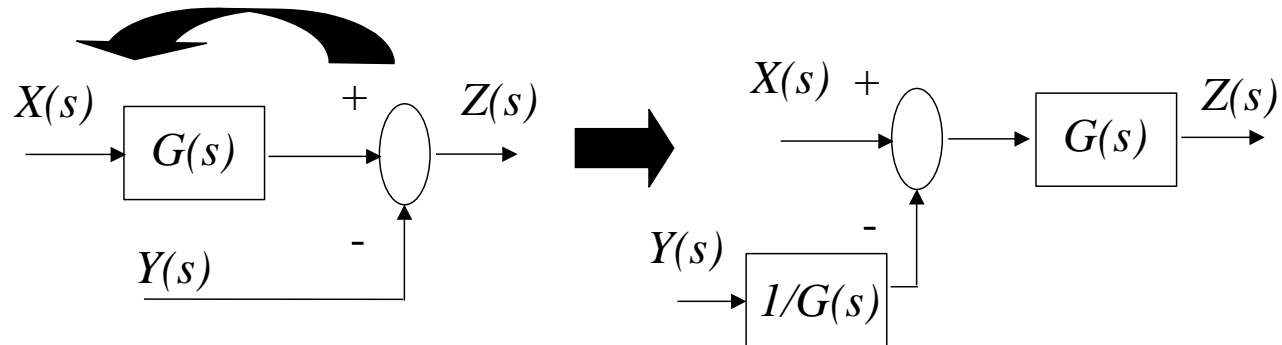
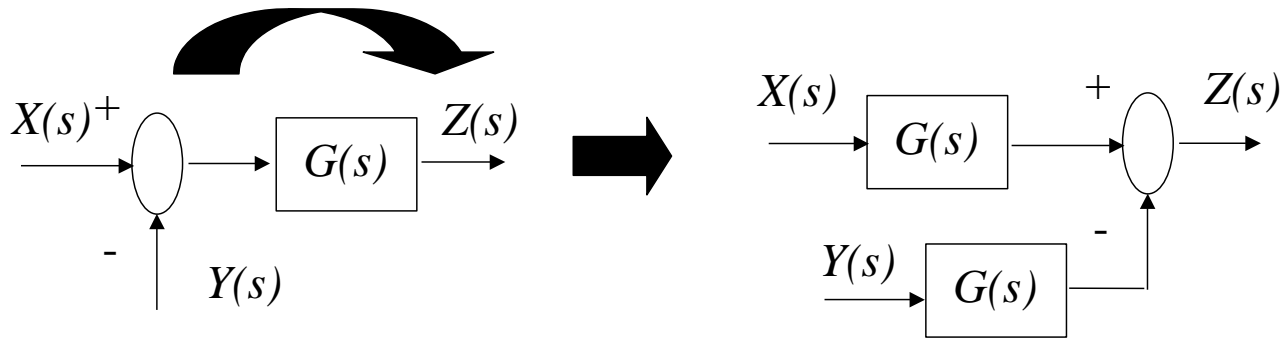
MundoAnuncio



# Reducción de bloques(1/2)

## ► Transposición del sumador

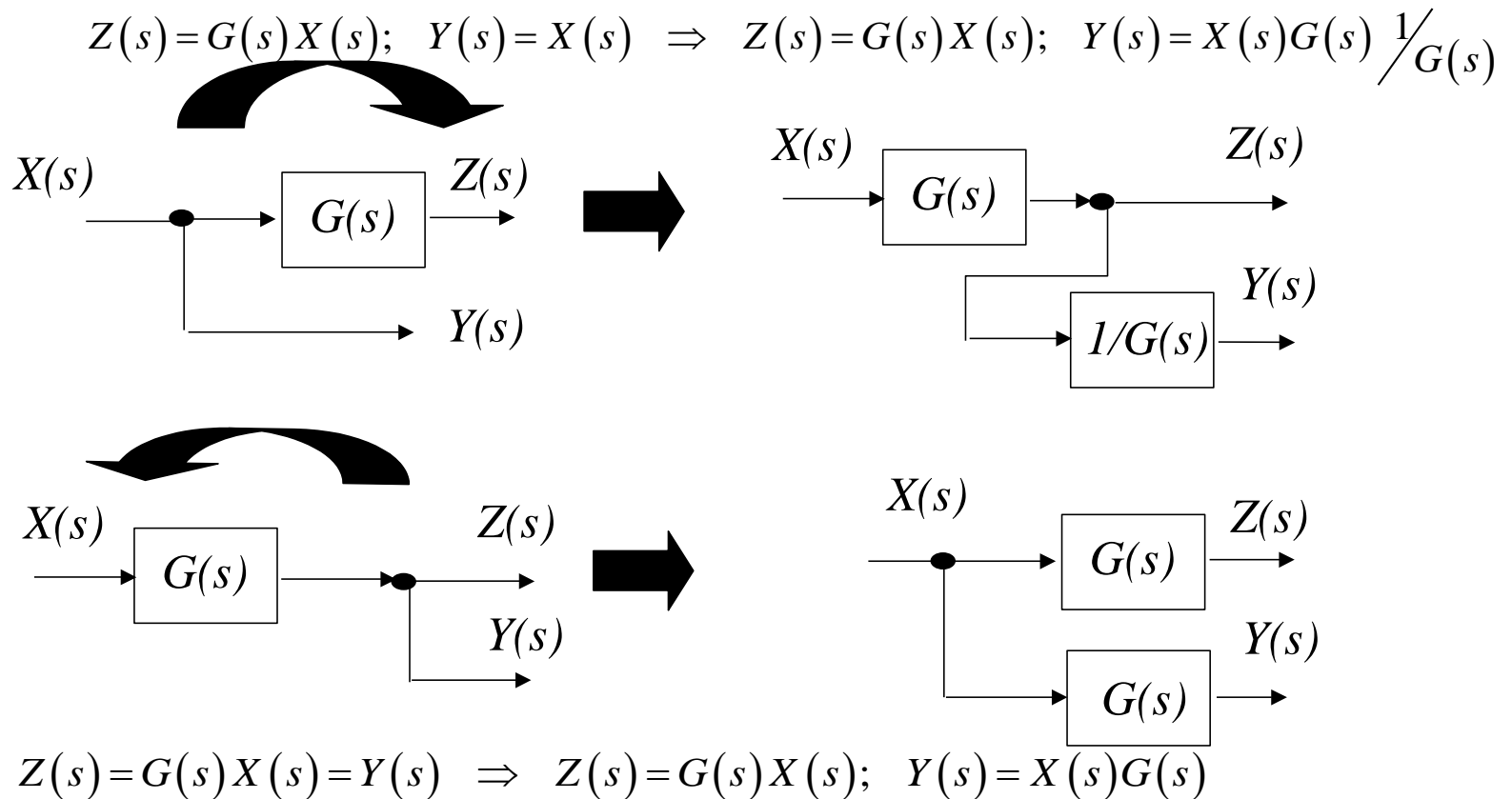
$$Z(s) = G(s)(X(s) - Y(s)) \Rightarrow Z(s) = G(s)X(s) - G(s)Y(s)$$



$$Z(s) = G(s)X(s) - Y(s) \Rightarrow Z(s) = G(s)(X(s) - (Y(s)1/G(s)))$$

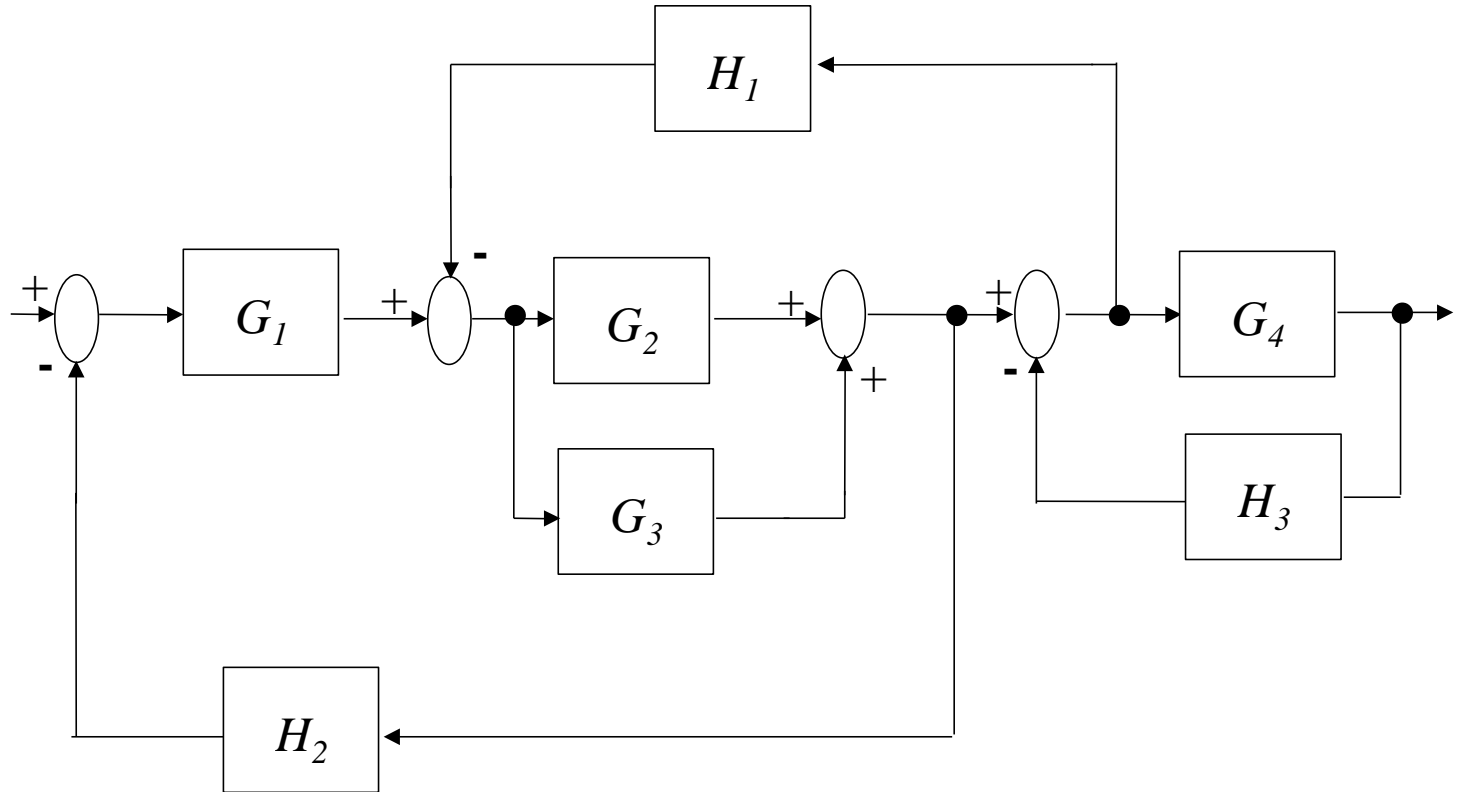
# Reducción de bloques(2/2)

- Movimiento de los puntos de bifurcación de las señales



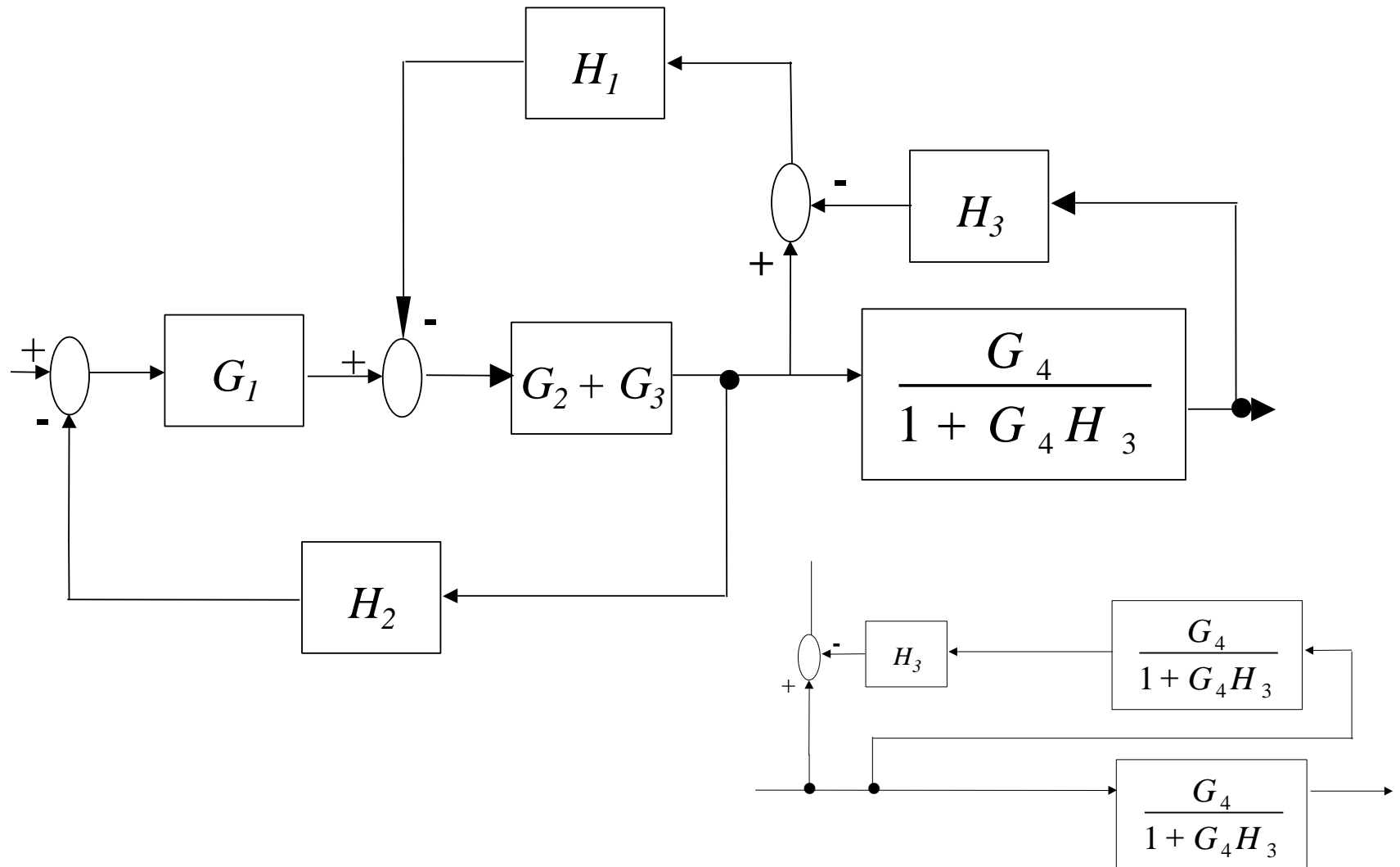
# Ejemplo 3.6

---

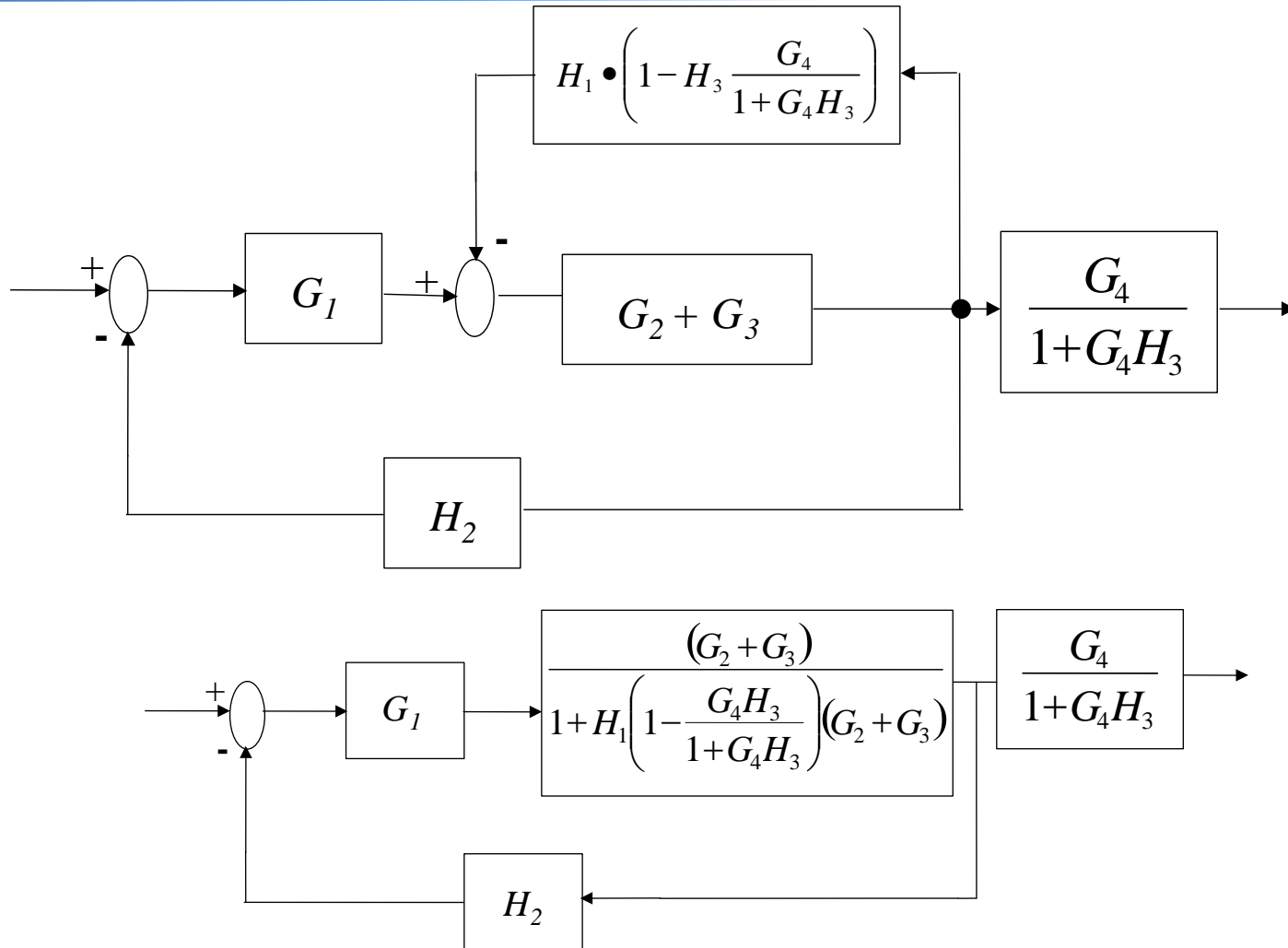




# Ejemplo 3.6

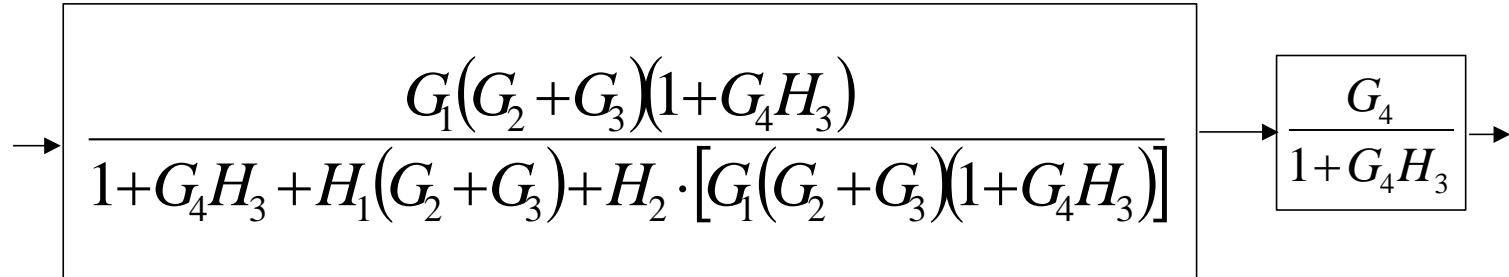


# Ejemplo 3.6



## Ejemplo 3.6

---



$$M(s) = \frac{G_1(G_2 + G_3)G_4}{1 + G_4 H_3 + H_1(G_2 + G_3) + H_2 \cdot [G_1(G_2 + G_3)(1 + G_4 H_3)]}$$

# Problema 5

El diagrama de la figura representa un esquema simplificado de levitación magnética. La fuerza magnética producida por el electroimán intenta compensar la fuerza de gravitación sobre el cuerpo que levita. Sabiendo que la fuerza magnética es proporcional al cuadrado de la corriente de la bobina e inversamente a la posición del cuerpo, determinar:

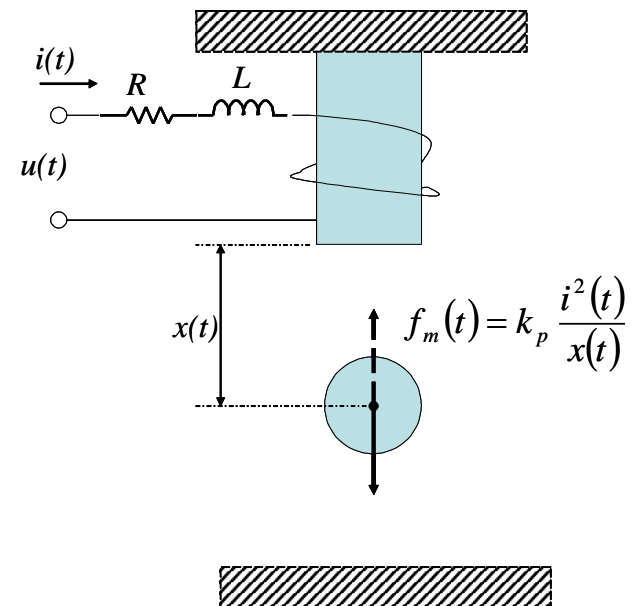
1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describe la dinámica del levitador.
2. Linealización de la planta alrededor del punto de reposo.
3. Diagrama de bloques del sistema.
4. ¿Es estable?

## Datos:

$$M = 0.1 \text{ kg} \quad k_p = 25 \cdot 10^{-3} \text{ [N} \cdot \text{m/A}^2] \quad R = 0.1 \ \Omega$$

$$L = 5.4 \text{ mH}$$

$$\text{Punto de reposo: } x_0 = 25 \text{ mm}$$



# Problema 5

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describe la dinámica del levitador:

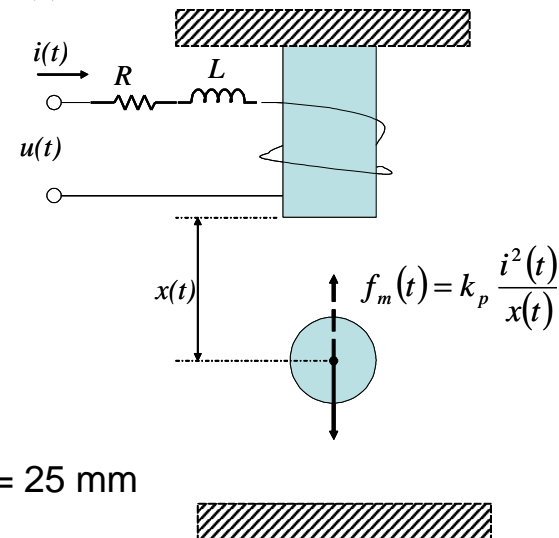
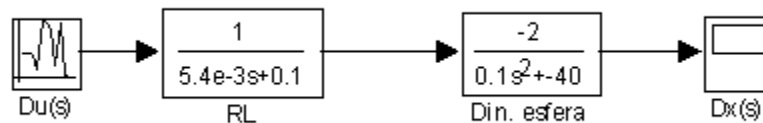
$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$M \cdot \ddot{x} = M \cdot g - k_p \frac{i^2(t)}{x(t)}$$

2. Linealización de la planta alrededor del punto de reposo.

$$i_0^2 = \frac{M \cdot g \cdot x_0}{k_p} \rightarrow i_0 \cong 1A \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u(t) = R \cdot \Delta i(t) + L \Delta \dot{i}(t) \\ M \cdot \Delta \ddot{x} = - \left[ k_p \frac{2 \cdot i_0}{x_0} \right] \cdot \Delta i(t) + \left[ k_p \frac{i_0^2}{x_0^2} \right] \cdot \Delta x(t) \end{array} \right.$$

3. Diagrama de bloques del sistema.



## Datos:

$M = 0.1 \text{ kg}$   $k_p = 25 \cdot 10^{-3} \text{ [N}\cdot\text{m/A}^2]$   $R = 0.1 \ \Omega$   $L = 5.4 \text{ mH}$  Punto de reposo:  $x_0 = 25 \text{ mm}$

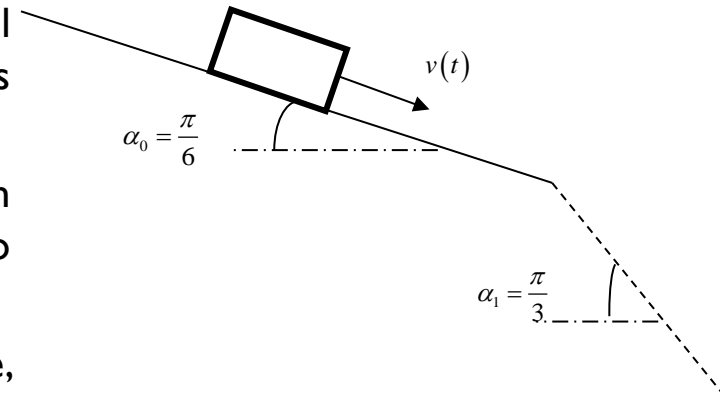
# Problema 6

---

Una masa se desliza por un plano inclinado a una determinada velocidad, se pide:

1. Conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que modele la dinámica y velocidad del régimen permanente de la masa cuando la pendiente es  $\pi/6$ .
2. Determinar el modelo incremental entre el ángulo del plano inclinado y su velocidad, con las condiciones iniciales dadas.
3. Variación temporal de la velocidad del objeto si hay un cambio de pendiente de  $\pi/6$  a  $\pi/3$ . Utilícese el modelo lineal del apartado anterior.
4. Determinar la velocidad en el régimen permanente, cuando la masa se desliza sobre el plano de  $\pi/3$ . ¿Existe discrepancia con el resultado del apartado anterior? ¿Por qué?

Datos:  $M = 10 \text{ kg}$ ,  $B = 5 \text{ Ns/m}$ ,  $g \sim 10 \text{ m/s}^2$ .



# Problema 6

---

1. Modelo dinámico:

$$M\ddot{x}(t) = Mg \operatorname{sen} \alpha - f_r(t) \quad f_r(t) = B\dot{x}(t)$$

2. Modelo de incrementos alrededor de una velocidad nominal:

$$v_{rp} = \frac{Mg \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{B} = 10 \text{ m/s} \quad G(s) = \frac{\Delta v(s)}{\Delta \alpha(s)} = \frac{[Mg \cos \alpha]_0}{Ms + B} = \frac{10\sqrt{3}}{1 + 2s}$$

3. Velocidad en el cambio de pendiente:

$$\Delta v(s) = \frac{\pi}{6} \frac{1}{s} \frac{10\sqrt{3}}{1 + 2s}$$

4. Existe discrepancia por la aproximación del sistema no lineal a través de la pendiente. En el modelo linealizado da 19 m/s y en el modelo no lineal es de 17.32 m/s.

# Examen julio 2014

La figura muestra un accionamiento hidráulico utilizado para el **control del ángulo** del alerón de una aeronave. El accionamiento consiste básicamente en un amplificador y un acondicionador de potencia hidráulico controlado por una válvula piloto sobre la que **se actúa exteriormente modificando su desplazamiento  $x(t)$** . La válvula piloto es una válvula equilibrada, en el sentido de que la presión de todas las fuerzas que actúan sobre ella está equilibrada. Se consideran condiciones de funcionamiento ideales. Se define:

$Q(t)$  = caudal de aceite al cilindro de potencia

$\Delta P(t)$  = diferencia de presiones en el cilindro ( $P_1 - P_2$ )

$x(t)$  = desplazamiento de la válvula piloto

La diferencia de presiones  $\Delta P(t)$  es una función del desplazamiento  $x(t)$  y del caudal  $Q(t)$ .

La relación entre las variables  $\Delta P(t)$ ,  $Q(t)$  y  $x(t)$  está dada por la ecuación **no lineal**:  $\Delta P(t) = f(x(t), Q(t))$ .  $K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} > 0$   $K_2 = - \left. \frac{\partial f}{\partial Q} \right|_{Q_0} > 0$

La variación del caudal depende de la aceleración del vástago  $a(t)$ :

$$A \rho a(t) = \dot{Q}(t)$$

donde  $A$  es el área del pistón y  $\rho$  es la densidad del aceite

El balance de fuerzas en el pistón da:

$$A \Delta P(t) - F(t) = m a(t)$$

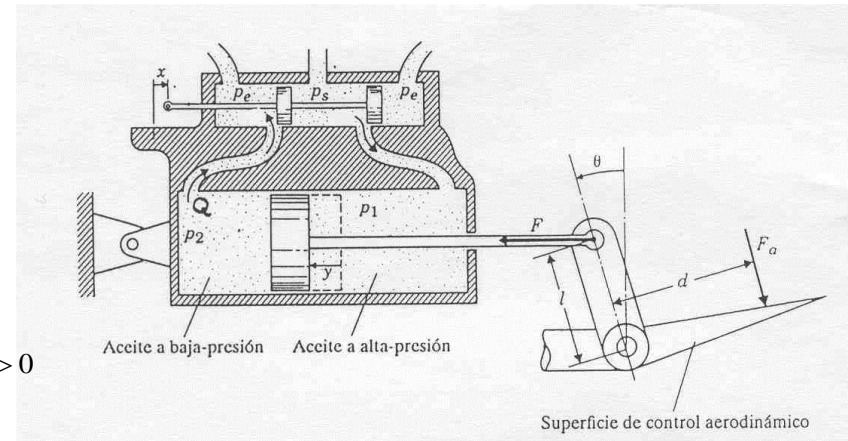
donde  $m$  es la masa del pistón y del vástago y  $F(t)$  es la fuerza aplicada por el vástago del pistón al punto de fijación de la superficie de control. El balance de momento de la superficie de control da:

$$I \alpha(t) = F(t)l - F_a(t)d$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la superficie de control y fijación alrededor de la articulación,  $F_a(t)$  es la carga aerodinámica aplicada (se considera una perturbación),  $l$  es la longitud del brazo de palanca, y  $\alpha(t)$  es la aceleración angular del eje ( $\alpha(t) = \ddot{\theta}(t)$ ).

Si el ángulo girado es pequeño, puede deducirse que:  $a(t) = l \alpha(t)$

Se define un punto de funcionamiento en equilibrio (nada se mueve) por  $F_0 = 0$ ,  $Q_0 = 0$ .





# Examen julio 2014

---

## I. Expresión en laplace de las ecuaciones linealizadas del sistema físico.

**Datos:** En el punto de equilibrio:  $K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 > 0$   $K_2 = - \left. \frac{\partial f}{\partial Q} \right|_0 > 0$

Solo hay una ecuación no lineal, en un punto de equilibrio con todas las variables a cero:

$$\Delta P(t) = f(x(t), Q(t)) \xrightarrow{\text{linealización}} \Delta P(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial Q} \right|_0 \Delta Q(t) = K_1 \Delta x(t) - K_2 \Delta Q(t)$$

El resto son lineales y por tanto el paso a laplace es inmediato:

$$\Delta P(t) = K_1 \Delta x(t) - K_2 \Delta Q(t) \xrightarrow{\text{laplace}} P(s) = K_1 x(s) - K_2 Q(s)$$

$$A p a(t) = \dot{Q}(t) \xrightarrow{\text{laplace}} A p a(s) = s Q(s)$$

$$A \Delta P(t) - F(t) = m a(t) \xrightarrow{\text{laplace}} A P(s) - F(s) = m a(s)$$

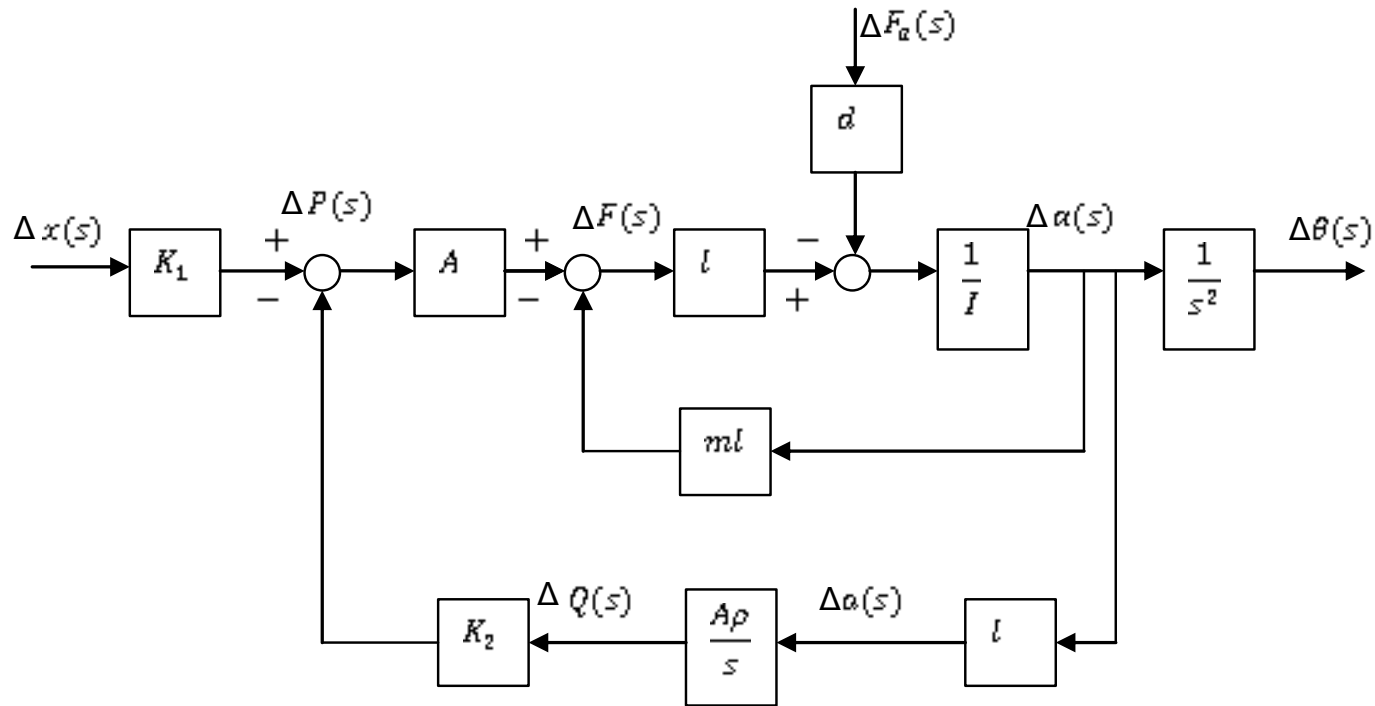
$$I \alpha(t) = l F(t) - d F_a(t) \xrightarrow{\text{laplace}} I \alpha(s) = l F(s) - d F_a(s)$$

$$a(t) = l \alpha(t) \xrightarrow{\text{laplace}} a(s) = l \alpha(s)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \alpha(t) \xrightarrow{\text{laplace}} s^2 \theta(s) = \alpha(s)$$

# Examen julio 2014

## Diagrama de bloques y FDT



Para obtener la FDT, se reduce el diagrama de bloques considerando la perturbación nula. Resultan entonces dos realimentaciones negativas anidadas, que conllevan a:

$$\frac{\theta(s)}{x(s)} = K_1 \frac{Al}{s((I + l^2m)s + Al^2\rho K_2)}$$

# Problema 4

- ▶ La figura representa el esquema simplificado de la calefacción de una habitación por medio de un radiador eléctrico. El radiador consiste en una resistencia  $R$  alimentada a  $V$  voltios y situada en un baño de aceite de masa calorífica  $M_c$  y temperatura  $T_c$ . Posee una superficie  $S_c$  de coeficiente global de transmisión  $U_c$  hacia el aire.
- ▶ El aire de la habitación se encuentra a una temperatura  $T_h$  y tiene una masa calorífica  $M_h$ . La temperatura exterior es  $T_e$ . Las paredes tienen una superficie  $S_p$  y un coeficiente global de transmisión  $U_p$ .
- ▶ La temperatura de la habitación se mide con un termómetro situado cerca del radiador, por lo que su indicación  $T_m$  viene afectada ligeramente por él. Dicha medida se compara con una referencia  $T_r$  y la diferencia, amplificada con un ganancia  $K$  se lleva a la resistencia del radiador.



$$1) T_m = 0.95T_h + 0.05T_c$$

$$2) V = k(T_r - T_m) \quad 3) q = 0.24V^2 / R$$

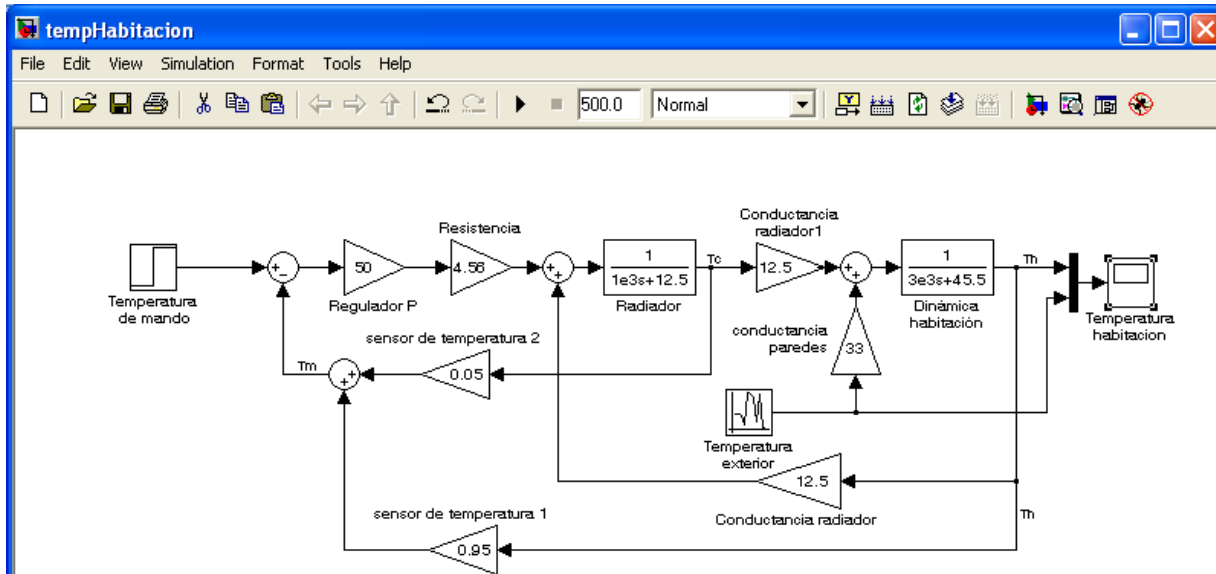
$$4) M_c \frac{dT_c}{dt} = q - U_c S_c (T_c - T_h)$$

$$5) M_h \frac{dT_h}{dt} = U_c S_c (T_c - T_h) - U_p S_p (T_h - T_e)$$

$$R = 20\Omega \quad k = 50V / ^\circ C \quad U_c S_c = 12.5cal / s^\circ C \quad U_p S_p = 33cal / s^\circ C$$

$$M_c = 1000cal / ^\circ C \quad M_h = 3000cal / ^\circ C$$

# Control de temperatura de la habitación

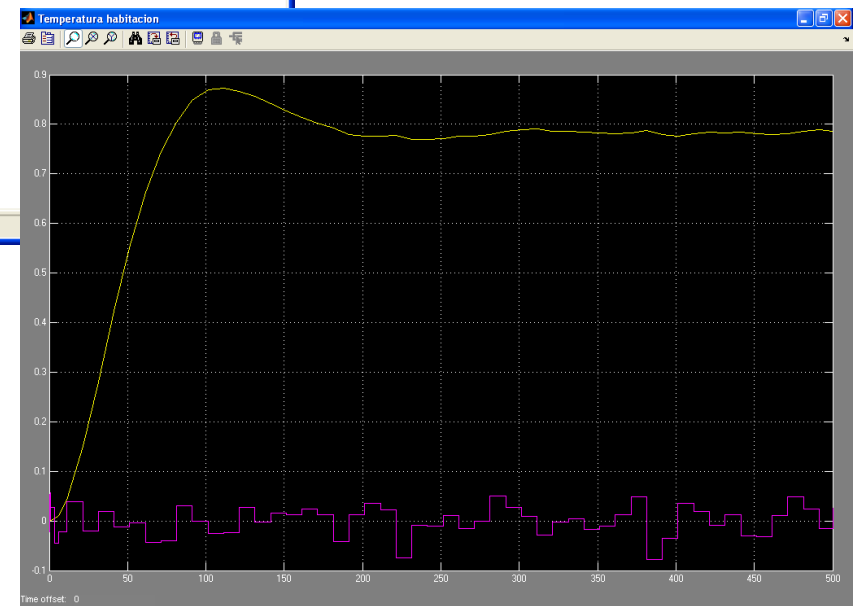


$$1) T_m = 0.95T_h + 0.05T_c$$

$$2) V = k(T_r - T_m) \quad 3) q = 0.24V^2 / R$$

$$4) M_c \frac{dT_c}{dt} = q - U_c S_c (T_c - T_h)$$

$$5) M_h \frac{dT_h}{dt} = U_c S_c (T_c - T_h) - U_p S_p (T_h - T_e)$$



## Descartes: “El discurso del método” (1637)

---



Dudar de forma metódica y provisional de todo lo que le rodea:

1. «El primero, no admitir jamás cosa alguna como verdadera sin haber conocido con evidencia que así era».
2. «El segundo, en dividir cada una de las dificultades que examinare, en tantas partes fuere posible y en cuantas requiriese su mejor solución».
3. «El tercero, en conducir con orden mis pensamientos, empezando por los objetos más simples y más fáciles de conocer, para ascender poco a poco, gradualmente, hasta el conocimiento de los más compuestos, e incluso suponiendo un orden entre los que no se preceden naturalmente».
4. «Y el último, en hacer en todo recuentos tan integrales y unas revisiones tan generales, que llegase a estar seguro de no omitir nada».